Rang matrice

Najpre da kažemo koje su **elementarne transformacije** matrica:

i) zamena mesta dve vrste (*kolone*)

ii) množenje elemenata jedne vrste (*kolone*) nekim brojem koji je različit od nule

iii) dodavanje elementima jedne vrste (*kolone*) elemenata(odgovarajućih) neke druge vrste(*kolone*) koji su prethodno pomnoženi proizvoljnim brojem.

Matrica $\boldsymbol{A}$ je **ekvivalentna** sa matricom $\boldsymbol{B}$ (oznaka $A \sim B$) ako se od matrice $\boldsymbol{A}$ može preći na matricu $\boldsymbol{B}$ primenom konačno mnogo ekvivalentnih transformacija.

Posmatrajmo neku matricu $A \in M_{m \times n}$ (matricu A iz skupa matrica M tipa $m \times n$)

Ako u matrici A izostavimo neke vrste ili neke kolone (a može istovremeno i vrste i kolone), tako dobijenu matricu nazivamo PODMATRICA matrice A.

Determinantu kvadratne podmatrice reda k matrice $A \in M_{m \times n}$ nazivamo MINOR reda k matrice A.

Neka je $M_{m \times n}$ skup svih matrica tipa $m \times n$ i $N_0 = \{0,1,2,3......\}$ skup prirodnih brojeva (sa 0).

Rang matrice u oznaci rang (ili r) je preslikavanje:

$$rang : M_{m \times n} \to N_0$$

određeno sa

a) $rang(A) = 0$ ako je A nula matrica

b) $rang(A) = p$, ako postoji minor **reda p** matrice A koji je **različit od nule** , a **SVI** minori **većeg reda od p**, ukoliko oni postoje**, su jednaki nuli**.

Primer 1.

Odrediti rang matrice $A=\begin{bmatrix} 2 & -4 \\ 1 & -2 \\ 3 & -6 \end{bmatrix}$.

Rešenje:

Retko kada možemo odmah reći koji je rang date matrice.

Prvi posao nam je da koristeći navedene **elementarne transformacije** matrica napravimo ekvivalentnu matricu koja će **ispod glavne dijagonale imati sve nule**! (takozvana **TRAPEZNA** matrica)

Kod nas su na glavnoj dijagonali 2 i -2, pa ispod njih pravimo nule.

Za našu matricu nule moraju biti na UOKVIRENIM mestima: $A=\begin{bmatrix} 2 & -4 \\ \boxed{1} & -2 \\ \boxed{3} & \boxed{-6} \end{bmatrix}$

I **redosled** "pravljenja" nula je vrlo bitan!

Nule pravimo najpre na mestu $A=\begin{bmatrix} 2 & -4 \\ 1 & -2 \\ \boxed{3} & -6 \end{bmatrix}$, zatim na mestu $A=\begin{bmatrix} 2 & -4 \\ \boxed{1} & -2 \\ 3 & -6 \end{bmatrix}$ i na kraju $A=\begin{bmatrix} 2 & -4 \\ 1 & -2 \\ 3 & \boxed{-6} \end{bmatrix}$.

$A=\begin{bmatrix} 2 & -4 \\ 1 & -2 \\ 3 & -6 \end{bmatrix}$. Najpre ćemo zameniti mesta prvoj i drugoj vrsti , da nam jedinica bude u prvoj vrsti zbog lakšeg računanja (ovo nije neophodno al olakšava posao...)

$\begin{bmatrix} 2 & -4 \\ 1 & -2 \\ 3 & -6 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 2 & -4 \\ 3 & -6 \end{bmatrix}$ Sad pravimo nulu na mestu gde je 3: $\begin{bmatrix} 2 & -4 \\ 1 & -2 \\ 3 & -6 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 2 & -4 \\ \boxed{3} & -6 \end{bmatrix}$

Prvu vrstu ćemo pomnožiti sa -3 i sabrati sa trećom vrstom i to upisati u treću vrstu.

Na mestu gde je bilo 3 biće: $1\cdot(-3)+3=\boxed{0}$

Na mestu gde je bilo -6 biće $-2\cdot(-3)+(-6)=\boxed{0}$

Pa je $\begin{bmatrix}2 & -4\\1 & -2\\3 & -6\end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix}1 & -2\\2 & -4\\3 & -6\end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix}1 & -2\\2 & -4\\0 & 0\end{bmatrix}$. Dalje nam treba nula gde je dvojka: $\begin{bmatrix}2 & -4\\1 & -2\\3 & -6\end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix}1 & -2\\2 & -4\\3 & -6\end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix}1 & -2\\\boxed{2} & -4\\0 & 0\end{bmatrix}$

Prvu vrstu ćemo pomnožiti sa -2 , sabrati sa drugom vrstom i upisati umesto druge vrste:

Na mestu gde je bilo 2 na taj način smo dobili nulu, a na mestu gde je bilo -4 biće: $-2\cdot(-2)+(-4)=\boxed{0}$

$$\begin{bmatrix}2 & -4\\1 & -2\\3 & -6\end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix}1 & -2\\2 & -4\\3 & -6\end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix}1 & -2\\2 & -4\\0 & 0\end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix}1 & -2\\0 & 0\\0 & 0\end{bmatrix}$$

Sad razmišljamo: Pošto je matrica tipa 3×2 , njen maksimalni rang može biti 2, jer postoje samo determinante drugog reda. Ali, koju god da uzmemo determinantu drugog reda ona će imati u jednoj vrsti obe nule a znamo da je vrednost takve determinante nula. Rang ove matrice je znači 1, u oznaci $\boxed{r(A)=1}$.

Primer 2.

Odrediti rang matrice $A=\begin{bmatrix}1 & -1 & 4\\2 & 1 & 1\\3 & 0 & 5\end{bmatrix}$

Rešenje:

Ova matrica je tipa 3×3, tako da postoji determinanta reda 3 , a to znači da i maksimalni rang može biti 3.

Da se ne zalićemo, prvo mi da napravimo nule ispod glavne dijagonale, na uokvirenim mestima: $\begin{bmatrix}1 & -1 & 4\\\boxed{2} & 1 & 1\\\boxed{3} & \boxed{0} & 5\end{bmatrix}$

Zamenićemo drugu i prvu kolonu, jer već imamo nulu...

$A=\begin{bmatrix}1 & -1 & 4\\2 & 1 & 1\\3 & 0 & 5\end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix}-1 & 1 & 4\\\boxed{1} & 2 & 1\\0 & 3 & 5\end{bmatrix}$ sad pravimo nulu na mestu gde je 1 (uokvireno)

Saberemo prvu i drugu vrstu i to ide u drugu vrstu...

$$A=\begin{bmatrix}1 & -1 & 4\\ 2 & 1 & 1\\ 3 & 0 & 5\end{bmatrix}\sim\begin{bmatrix}-1 & 1 & 4\\ 1 & 2 & 1\\ 0 & 3 & 5\end{bmatrix}\sim\begin{bmatrix}-1 & 1 & 4\\ 0 & 3 & 5\\ 0 & \boxed{3} & 5\end{bmatrix}$$ dalje pravimo nulu na uokvirenom mestu(gde je 3):

Od treće vrste oduzmemo drugu i to ide u treću vrstu.

$$A=\begin{bmatrix}1 & -1 & 4\\ 2 & 1 & 1\\ 3 & 0 & 5\end{bmatrix}\sim\begin{bmatrix}-1 & 1 & 4\\ 1 & 2 & 1\\ 0 & 3 & 5\end{bmatrix}\sim\begin{bmatrix}-1 & 1 & 4\\ 0 & 3 & 5\\ 0 & 3 & 5\end{bmatrix}\sim\begin{bmatrix}-1 & 1 & 4\\ 0 & 3 & 5\\ 0 & 0 & 0\end{bmatrix}$$

Sad je jasno da rang **ne može** biti **tri** jer je vrednost determinante $\begin{vmatrix}-1 & 1 & 4\\ 0 & 3 & 5\\ 0 & 0 & 0\end{vmatrix}=0$

Ako recimo uzmemo $\begin{vmatrix}-1 & 1\\ 0 & 3\end{vmatrix}$, njena vrednost je $-3\neq 0$, pa je rang ove matrice 2: $\boxed{r(A)=2}$

Primjer:

1. Odrediti rang matrice u zavisnosti od parametra *a*.

$$A=\begin{bmatrix}2 & 1 & a\\ 3 & 5 & 0\\ 1 & 4 & 1\end{bmatrix}$$

Rešenje:

Pre nego li krenete da pravite nule ispod glavne dijagonale, nije loše da parametar prebacimo da je u zadnjoj vrsti , na krajnjoj desnoj poziciji. Zato ćemo najpre da zamenimo mesta prvoj vrsti i trećoj vrsti.

$$A=\begin{bmatrix}2 & 1 & a\\ 3 & 5 & 0\\ 1 & 4 & 1\end{bmatrix}\sim\begin{bmatrix}1 & 4 & 1\\ 3 & 5 & 0\\ 2 & 1 & a\end{bmatrix}$$ Sad pravimo nule na naznačenim mestima $\begin{bmatrix}1 & 4 & 1\\ \boxed{3} & 5 & 0\\ \boxed{2} & 1 & a\end{bmatrix}$

III vrsta minus I vrsta pomnožena sa 2 ide u III vrstu

II vrsta minus I vrsta pomnožena sa 3 ide u II vrstu

$A \sim \begin{bmatrix} 1 & 4 & 1 \\ 3 & 5 & 0 \\ 2 & 1 & a \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 4 & 1 \\ 0 & -7 & -3 \\ 0 & -7 & a-2 \end{bmatrix}$ Sad pravimo još jednu nulu na mestu $\begin{bmatrix} 1 & 4 & 1 \\ 0 & -7 & -3 \\ 0 & \boxed{-7} & a-2 \end{bmatrix}$

Od III vrste oduzmemo II i to upišemo umesto treće vrste.

$A \sim \begin{bmatrix} 1 & 4 & 1 \\ 0 & -7 & -3 \\ 0 & \boxed{-7} & a-2 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 4 & 1 \\ 0 & -7 & -3 \\ 0 & 0 & a-2-(-3) \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 4 & 1 \\ 0 & -7 & -3 \\ 0 & 0 & a+1 \end{bmatrix}$ Uočimo poziciju $\begin{bmatrix} 1 & 4 & 1 \\ 0 & -7 & -3 \\ 0 & 0 & \boxed{a+1} \end{bmatrix}$.

Jasno je da ako je za $a+1=0 \rightarrow \boxed{a=-1}$, rang matrice 2, jer imamo matricu $\begin{bmatrix} 1 & 4 & 1 \\ 0 & -7 & -3 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

A, ako je $a \neq -1$, rang matrice je tri, jer dobijamo matricu $\begin{bmatrix} 1 & 4 & 1 \\ 0 & -7 & -3 \\ 0 & 0 & a+1 \end{bmatrix}$, čija determinanta je različita od nule, jer ako se sećate, vrednost determinante ove matrice je proizvod brojeva po glavnoj dijagonali: $\det A = 1 \cdot (-7) \cdot (a+1)$

Primjer:

Odredi rang matrica:

a) $A = \begin{bmatrix} 2 & -3 & 16 & 1 \\ 1 & 6 & -2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 & 2 \end{bmatrix}$,

b) $B = \begin{bmatrix} 2 & 3 & -1 & 4 \\ 1 & 0 & 1 & 2 \\ 3 & 4 & 0 & 7 \\ -2 & -1 & 4 & 1 \\ 4 & -2 & 3 & 5 \end{bmatrix}$.

Rješenje:

$$A \sim \begin{bmatrix} 1 & 6 & -2 & 3 \\ 2 & -3 & 16 & 1 \\ 1 & 3 & 2 & 2 \end{bmatrix} \begin{matrix} \\ R_2-2R_1 \\ R_3-R_1 \end{matrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 6 & -2 & 3 \\ 0 & -15 & 20 & -5 \\ 0 & -3 & 4 & -1 \end{bmatrix} \begin{matrix} \\ \\ 5R_3-R_2 \end{matrix}$$

$$\sim \begin{bmatrix} 1 & 6 & -2 & 3 \\ 0 & -15 & 20 & -5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

$$B \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & -1 & 4 \\ 3 & 4 & 0 & 7 \\ -2 & -1 & 4 & 1 \\ 4 & -2 & 3 & 5 \end{bmatrix} \begin{matrix} \\ R_2-2R_1 \\ R_3-3R_1 \\ R_4+2R_1 \\ R_5-4R_1 \end{matrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 3 & -3 & 0 \\ 0 & 4 & -3 & 1 \\ 0 & -1 & 6 & 5 \\ 0 & -2 & -1 & -3 \end{bmatrix}$$

$$B \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 4 & -3 & 1 \\ 0 & -1 & 6 & 5 \\ 0 & -2 & -1 & -3 \end{bmatrix} \begin{matrix} \\ \\ R_3-4R_2 \\ R_4+R_2 \\ R_5+2R_2 \end{matrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 5 & 5 \\ 0 & 0 & -3 & -3 \end{bmatrix} \begin{matrix} \\ \\ \\ R_4-5R_3 \\ R_5+3R_3 \end{matrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Primjer:

. Odrediti rang matrice:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & -2 & 1 & 0 \\ 2 & -2 & -3 & -1 & -5 \\ -1 & 2 & 0 & 2 & 5 \\ 0 & 4 & -1 & 0 & 3 \\ 3 & 1 & -1 & 2 & 7 \\ 1 & -1 & 0 & -3 & -6 \end{bmatrix}$$

Rješenje:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & -2 & 1 & 0 \\ 2 & -2 & -3 & -1 & -5 \\ -1 & 2 & 0 & 2 & 5 \\ 0 & 4 & -1 & 0 & 3 \\ 3 & 1 & -1 & 2 & 7 \\ 1 & -1 & 0 & -3 & -6 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & -1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -3 & -5 \\ 0 & 1 & -2 & 3 & 5 \\ 0 & 4 & -1 & 0 & 3 \\ 0 & 4 & 5 & -1 & 7 \\ 0 & 0 & 2 & -4 & -6 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & -1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 3 & 5 \\ 0 & 0 & 1 & -3 & -5 \\ 0 & 4 & -1 & 0 & 3 \\ 0 & 4 & 5 & -1 & 7 \\ 0 & 0 & 2 & -4 & -6 \end{bmatrix}$$

$$A \sim \begin{bmatrix} 1 & -1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 3 & 5 \\ 0 & 0 & 1 & -3 & -5 \\ 0 & 0 & 7 & -12 & -17 \\ 0 & 0 & 13 & -13 & -13 \\ 0 & 0 & 2 & -4 & -6 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & -1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 3 & 5 \\ 0 & 0 & 1 & -3 & -5 \\ 0 & 0 & 0 & 9 & 18 \\ 0 & 0 & 0 & 26 & 52 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 4 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & -1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 3 & 5 \\ 0 & 0 & 1 & -3 & -5 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

$$A \sim \begin{bmatrix} 1 & -1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 3 & 5 \\ 0 & 0 & 1 & -3 & -5 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow rang A = 4$$

Primjer:

Odrediti realne brojeve a i b tako da je

$$rang \begin{bmatrix} 1 & 3 & 1 & -2 \\ 2 & 6 & -3 & -4 \\ a & b & 6 & -2 \end{bmatrix} = 2$$

Rješenje:

$$\begin{bmatrix} 1 & 3 & 1 & -2 \\ 2 & 6 & -3 & -4 \\ a & b & 6 & -2 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 3 & 1 & -2 \\ -3 & 6 & 2 & -4 \\ 6 & b & a & -2 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 3 & 1 & -2 \\ 0 & 15 & 5 & -10 \\ 0 & b-18 & a-6 & 10 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 & 3 \\ 0 & -10 & 5 & 15 \\ 0 & 10 & a-6 & b-18 \end{bmatrix} \sim$$

$$\sim \begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 & 3 \\ 0 & -10 & 5 & 15 \\ 0 & 0 & a-1 & b-3 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow a-1=0 \wedge b-3=0 \Rightarrow a=1 \wedge b=3$$

Primjer:

Diskutovati rang matrice za razne vrijednosti parametra a:

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 1 & 4 \\ a & 4 & 10 & 1 \\ 1 & 7 & 17 & 3 \\ 2 & 2 & 4 & 3 \end{bmatrix}$$

Rješenje:

$$A=\begin{bmatrix}3&1&1&4\\a&4&10&1\\1&7&17&3\\2&2&4&3\end{bmatrix}\sim\begin{bmatrix}1&7&17&3\\3&1&1&4\\a&4&10&1\\2&2&4&3\end{bmatrix}\sim\begin{bmatrix}1&7&17&3\\0&-20&-50&-5\\0&-7a+4&10-17a&1-3a\\2&-12&-30&-3\end{bmatrix}$$

$$\sim\begin{bmatrix}1&7&17&3\\0&4&10&1\\0&4-7a&10-17a&1-3a\\0&4&10&1\end{bmatrix}\sim\begin{bmatrix}1&7&17&3\\0&4&10&1\\0&4-7a&10-17a&1-3a\\0&0&0&0\end{bmatrix}$$

$$\sim\begin{bmatrix}1&7&17&3\\0&4&10&1\\0&-7a&-17a&-3a\\0&0&0&0\end{bmatrix}\overset{II\cdot 7a+4III}{\sim}\begin{bmatrix}1&7&17&3\\0&4&10&1\\0&0&2a&-5a\\0&0&0&0\end{bmatrix}$$

$a=0\Rightarrow rangA=2$; u suprotnom dijeljenjem treće vrste sa $-a$ dobijamo

$$A\sim\begin{bmatrix}1&7&17&3\\0&4&10&1\\0&0&2&-5\\0&0&0&0\end{bmatrix}\Rightarrow rangA=3$$

Dakle imamo da je $rangA=\begin{cases}2; a=0\\3; a\neq 0\end{cases}$.

Evo još nekoliko stvari koje bi trebalo da znamo o matricama:

1) Ekvivalentne matrice imaju isti rang!

2) Ako posmatramo tri matrice A,B i C iz skupa svih matrica $M_{m\times n}$, za njih važi:

$A\sim A\rightarrow refleksivnost$
$A\sim B\Rightarrow B\sim A\rightarrow simetricnost$
$A\sim B\wedge B\sim C\Rightarrow A\sim C\rightarrow tranzitivnost$

Ovo nam govori da je $\sim$ **relacija ekvivalencije** na skupu svih matrica tipa $m\times n$.

3) Neka je A matrica ranga p većeg ili jednakog jedinici $p\geq 1$. Tada postoje p nezavisnih vrsta (kolona) matrice A takvih da su ostale vrste (kolone) linearne kombinacije tih p vrsta (kolona).

4) Rang matrice jednak je maksimalnom broju linearno nezavisnih vrsta (kolona) te matrice.

Zadaci:

Diskutovati rang matrice za razne vrijednosti parametra a.

a) $\begin{bmatrix} 4 & 4 & -3 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & 0 \\ a & 2 & 2 & 2 \\ 9 & 9 & a & 3 \end{bmatrix}$ $\left(\begin{array}{l} R: rang = 3, \text{ ako je } a \in \{-6, 2\} \\ \quad rang = 4, \text{ inače} \end{array} \right)$ b) $\begin{bmatrix} 6 & 3 & 5 & 9 \\ 5 & 2 & 3 & 6 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 1 & a \end{bmatrix}$

Primenom elementarnih transformacija odrediti rang matrice

$$C = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 6 \\ 3 & 6 & 9 \end{bmatrix}.$$

Primenom elementarnih transformacija odrediti rang matrice

$$D = \begin{bmatrix} 1 & 3 & -2 & 5 & 0 & 1 \\ -2 & 4 & 3 & -1 & 1 & 2 \\ -2 & 14 & 2 & 8 & 2 & 6 \\ 1 & 23 & -4 & 23 & 2 & 9 \end{bmatrix}.$$